ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÃ THỊ THANH XUÂN

MỘT SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ CHO ĐA THỨC NHIỀU BIẾN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÃ THỊ THANH XUÂN

MỘT SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ CHO ĐA THỨC NHIỀU BIẾN

Chuyên ngành: GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
GS.TSKH NGUYỄN QUANG DIỆU

Thái Nguyên - Năm 2017

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan nội dung trong luận văn Thạc sĩ chuyên ngành Toán giải tích với đề tài:

"MỘT SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ CHO ĐA THỨC NHIỀU BIẾN"

được hoàn thành bởi nhận thức của tôi, không trùng lặp với luận văn, luận án và các công trình đã công bố.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2017

Người viết Luận văn

Lã Thị Thanh Xuân

Lời cảm ơn

Qua luận văn này, em xin gửi lời cảm ơn chân thành đến các thầy cô trong khoa Toán trường Đại học sư phạm Thái Nguyên nói chung và các thầy cô trong chuyên ngành Toán Giải tích nói riêng đã tạo điều kiện cho em học tập và nghiên cứu. Đặc biệt, em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến GS.TSKH. Nguyễn Quang Diệu, người đã tận tình chỉ bảo, hướng dẫn và giúp đỡ em trong suốt quá trình làm luận văn. Em xin cảm ơn gia đình, bạn bè và tất cả mọi người đã quan tâm, tạo điều kiện, động viên cổ vũ em để em có thể hoàn thành nhiệm vụ của mình. Mặc dù đã có nhiều cố gắng, song do thời gian và trình độ còn hạn chế và nội dung luận văn còn khá mới mẻ nên bản thân khóa luận khó tránh khỏi những thiếu sót. Em rất mong các thầy cô, và các bạn học viên nhận xét, đóng góp ý kiến để bản luận văn này được hoàn thiện và phát triển hơn. Em xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2017

Người viết luận văn

Lã Thị Thanh Xuân

Mục lục

Lời cam đoan i

Lời cảm ơn ii

Mục lục ii

Mở đầu 1

1 KIẾN THỨC CHUẨN BỊ 4

1.1 Định nghĩa hàm chỉnh hình 4

1.2 Định nghĩa đa thức Chebyshev 5

1.2.1 Đa thức Chebyshev loại một 5

1.2.2 Đa thức Chebyshev loại hai 5

1.3 Tập lồi, nón lồi, phiếm hàm Minkowski 6

1.3.1 Tập lồi 6

1.3.2 Nón lồi 7

1.3.3 Phiếm hàm Minkowski 8

1.4 Bất đẳng thức Chebyshev và bất đẳng thức Remez 12

2 BÀI TOÁN CỰC TRỊ CHEBYSHEV VÀ BÀI TOÁN CỰC TRỊ REMEZ 19

2.1 Bất đẳng thức Chebyshev cho đa thức nhiều biến 21

2.2 Bất đẳng thức Remez cho đa thức nhiều biến 27

Kết luận chung 41

Tài liệu tham khảo 42

Mở đầu

Trong giải tích, bài toán tối ưu hóa cực trị của các đa thức một biến và nhiều biến đóng một vai trò quan trọng.

Chẳng hạn nhờ các đa thức này mà chúng ta đạt được các sai số nhỏ nhất trong quá trình xấp xỉ hàm bằng phương pháp nội suy Lagrange.

Kết quả đầu tiên về tối ưu đa thức một biến đã được tìm ra từ giữa thế kỷ XIX bởi nhà toán học người Nga P. L. Chebyshev.

Định lý (Bất đẳng thức Chebyshev) *Cho $p(x)$ là đa thức bậc n, hệ số cao nhất bằng 1.*

$$p\left(x\right) = x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a^n.$$

Khi đó

$$\sup_{x \in [-1,1]} \left|p\left(x\right)\right| \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Hơn nữa dấu bằng xảy ra chỉ khi $p\left(x\right) = 2^{1-n} T_n\left(x\right)$, ở đây $T_n\left(x\right)$ là đa thức Chebyshev.

Bằng cách sử dụng đa thức Chebyshev chúng ta có thể đưa ra các ước lượng về chuẩn của các đa thức trên các tập compact của $\mathbb{R}$. Kết quả quan trọng sau đây được tìm ra bởi Remez ở đầu thế kỉ XX

Định lý (Bất đẳng thức Remez). *Bất đẳng thức*

$$\|p\|_{[-1,1]} \leq T_n\left(\frac{2+s}{2-s}\right)$$

đúng với mọi $p \in \mathcal{P}_n$ và $s \in (0,2)$ thỏa mãn

$$m\left(\{x \in [-1,1] : |p\left(x\right)| \leq 1\}\right) \geq 2-s.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$p\left(x\right) = \pm T_n\left(\frac{\pm 2x+s}{2-s}\right).$$

Từ các định lý trên, một cách tự nhiên chúng ta nghiên cứu các bài toán sau đây.

A. Bài toán Chebyshev. Ước lượng chuẩn của một đa thức trên tập F với điều kiện chuẩn của nó trên một tập K là biết trước. Cụ thể hơn với F,$K \subset \mathbb{R}^m$ cho trước chúng ta ước lượng đại lượng

$$\sup\left\{\frac{\|p\|_{C(F)}}{\|p\|_{C(K)}} : p \in \mathcal{P}_n, p \not\equiv 0\right\}.$$

B. *Bài toán Remez.* Ước lượng chuẩn của một đa thức trên một tập $K \subset \mathbb{R}^m$ bằng chuẩn của nó trên một tập con của K với độ đo "đủ lớn". Nghĩa là đánh giá đại lượng sau khi mà $0 < \varepsilon < 1$ đã cho trước

$$\sup\left\{\frac{\|p\|_{C(K)}}{\|p\|_{C(F)}} : p \in \mathcal{P}_n, p \not\equiv 0; F \subset K, \eta_m\left(F\right) \geq \left(1-\varepsilon\right)\eta_m\left(K\right)\right\}.$$

Lời giải của hai bài toán được biết trong trường hợp một biến nhờ hai định lý trên. Nội dung của luận văn là trình bày lại các kết quả chính của bài báo " Some Extremal Problems for Multivariate Polynomials on Convex Bodies", nhằm giải quyết hai bài toán nêu trên. Để làm được điều đó chúng tôi chia luận văn thành 2 chương:

Chương I: Một số kiến thức chuẩn bị

Trong chương này chúng tôi trình bày khái niệm về hàm chỉnh hình, tập lồi, nón lồi, phiếm hàm Minkowski, bất đẳng thức Chebyshev và bất đẳng thức Remez...,các kí hiệu, khái niệm và một số tính chất cơ bản. Đặc biệt là chúng tôi trình bày cách xây dựng và tính chất của đa thức Chebyshev. Đồng thời chúng tôi trình bày bất đẳng thức Chebyshev và Remez cho đa thức một biến.

Chương II: Một số bài toán cực trị của đa thức nhiều biến trên vật thể lồi

Đây là chương chính của luận văn. Trong chương này chúng tôi mở rộng bất đẳng thức Chebyshev và Remez trong trường hợp nhiều biến, từ đó đưa ra lời giải cho bài toán Chebyshev và bài toán Remez.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2017

Người viết Luận văn

Lã Thị Thanh Xuân

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1 Định nghĩa hàm chỉnh hình

Định nghĩa 1.1.1. Cho hàm số f xác định trên miền $D \subset C$. Xét giới hạn.

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}, z, z + \Delta z \in D$$

Nếu tại điểm z giới hạn này tồn tại thì nó được gọi là đạo hàm phức của f tại z, kí hiệu là $f'(z)$ hay $\frac{df}{dz}(z)$

Như vậy $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ Hàm f có đạo hàm phức tại z cũng được gọi là khả vi phức hay C - khả vi tại z.

Bởi vì $\lim\limits_{\Delta z \to 0} [f(z + \Delta z) - f(z)] = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = 0$ nên nếu f C- khả vi tại z thì

$$\lim_{\Delta z \to 0} [f(z + \Delta z) - f(z)] = 0.$$

Nói cách khác f liên tục tại z.

Cũng như đối với hàm biến thực, bởi quy nạp ta viết

$$f^{(k)} = (f^{(k-1)})'.$$